М.Ф. Бузинских, Н.Н. Бутакова
Тюменский государственный университет, г. Тюмень

УДК 532.5

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ НА СЛОЕ ДВУХФАЗНОЙ ЖИДКОСТИ НЕОГРАНИЧЕННОЙ ГЛУБИНЫ

Аннотация. Поставлена краевая задача о распространении поверхностных волн по слою двухфазной смеси бесконечной глубины. Получено асимптотическое решение в виде затухающих прогрессивных волн. Исследована зависимость декремента затухания и фазовой скорости волны от концентрации дисперсной фазы.

Ключевые слова: поверхностные волны, двухфазная смесь.

Целью работы является решение задачи о распространении поверхностных волн по слою двухфазной смеси бесконечной глубины. Несущая фаза – идеальная несжимаемая жидкость, вязкость которой проявляется только на межфазной границе; дисперсная фаза – недеформируемые частицы одного размера, плотность которых больше плотности несущей среды. В отсутствие волны дисперсная фаза равномерно распределена по глубине слоя смеси. Теплообмен и массообмен между фазами отсутствуют.

Рассматривается слой двухфазной смеси бесконечной глубины, ограниченный сверху свободной поверхностью $z = \xi(t, x)$. Движение жидкости считается плоскопараллельным в плоскости xz. Оси x и z направлены так, что ось x совпадает со свободной поверхностью в ее невозмущенном состоянии, а ось z направлена вертикально вверх. В области, занятой смесью, выполняются уравнения неразрывности и движения [1,2]

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \rho_i \boldsymbol{v}_i = 0,$$

$$\rho_i \frac{d_i \boldsymbol{v}_i}{dt} = -\alpha_i \boldsymbol{\nabla} p + \rho_i \boldsymbol{g}_i + (-1)^i \alpha_1 \alpha_2 R(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2), \quad i = 1,2, \qquad (1)$$

где $\rho_i = \alpha_i \rho_i^0$ – приведенные плотности фаз, характеризующие массу фазы в единице объёма смеси; ρ_i^0 – истинные плотности фаз, α_i – объемные концентрации ($\alpha_1 + \alpha_2 = 1$); $\boldsymbol{v}_i$ – вектор скорости $i -$ йфазы; p –давление; $\boldsymbol{g_i}$ – ускорение массовых сил. Эмпирический коэффициент R характеризует силу вязкого трения Стокса, вызванную несовпадением скоростей фаз. Например, для сферических частиц радиуса a его значение принимается равным $R = 9\eta/2a^2$, где η– коэффициент динамической вязкости жидкости [3].

На свободной поверхности среды в теории поверхностных волн ставятся кинематическое и динамическое граничные условия [4]. Они следуют из условий отсутствия потока массы через поверхность и непрерывности потока импульса соответственно. Для рассматриваемой двухфазной смеси эти условия имеют вид [5]

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} - \alpha_1 v_{1z} - \alpha_2 v_{2z} + \frac{\partial \xi}{\partial x}(\alpha_1 v_{1x} + \alpha_2 v_{2x}) = 0, \qquad p = P_a, \qquad z = \xi(t,x). \quad (2)$$

где $z = \xi(t,x)$ – уравнение свободной поверхности, P_a – атмосферное давление. Кроме того на глубине (при $z \to -\infty$) должно выполняться условие затухания движения $\boldsymbol{v}_i \to 0, i = 1,2$.

Чтобы система (1), (2) описывала волновое движение смеси, необходимо ввести волновые возмущения неизвестных величин [4]. Для этого рассматривается задача об оседании частиц под воздействием массовых сил, движение осуществляется только вдоль оси z:

$$v_{ix} = 0,\ \ v_{iz} = v_{iz}(z),\ \ \alpha_i = \alpha_i(z),\ \ p = p(z),\ \ i = 1,2.$$

Система уравнений (1) допускает решение, удовлетворяющее граничным условиям (2)

$$\alpha_2 = \alpha_0 = const,\ \ \alpha_1 = 1 - \alpha_0,\ \ v_{1z} = \frac{\alpha_0(\rho_2^0 - \rho_1^0)g}{R},$$

$$v_{2z} = -\frac{(1-\alpha_0)(\rho_2^0 - \rho_1^0)g}{R},\ \ p = P_a + \rho^0 g z,\ \ \rho^0 = (1-\alpha_0)\rho_1^0 + \alpha_0 \rho_2^0.$$

Предполагается, что по свободной поверхности слоя в положительном направлении оси x распространяется волна длиной λ. Длина волны много больше ее высоты ($\lambda \gg \xi_{max}$), и много больше характерного размера частиц ($\lambda \gg a$). Неизвестные функции определяются в виде суммы решения задачи об оседании частиц и волновых возмущений $\gamma(t,x,z)$, $P(t,x,z)$, $\boldsymbol{V}_i(t,x,z) = \{V_{ix}(t,x,z), V_{iz}(t,x,z)\}$, $i = 1,2$ – концентрации, давление, скорости $i -$й фазы соответственно:

$$\alpha = \alpha_0 + \gamma(t,x,z), \;\; p = P_a + \rho^0 gz + P(t,x,z), \;\; v_{ix} = V_{ix}(t,x,z), \;\; i = 1,2,$$

$$v_{1z} = \frac{\alpha_0(\rho_2^0 - \rho_1^0)g}{R} + V_{1z}(t,x,z), \;\; v_{2z} = -\frac{(1-\alpha_0)(\rho_2^0 - \rho_1^0)g}{R} + V_{2z}(t,x,z).$$

Для постановки краевой задачи вводятся безразмерные переменные и величины, в предположении, что все волновые возмущения одного порядка малости ε

$$x = \frac{x^*}{k}, \;\; z = \frac{z^*}{k}, \;\; t = \frac{t^*}{kc}, \;\; \xi = \frac{\varepsilon\xi^*}{k}, \;\; \gamma = \varepsilon\alpha_0\gamma^*,$$

$$P = \varepsilon\rho^0 c^2 P^*, \;\; V_{ix} = \varepsilon c {V_{ix}}^*, \;\; V_{iz} = \varepsilon c {V_{iz}}^*, \;\; i = 1,2.$$

где звездочкой (*) обозначены безразмерные переменные, c – фазовая скорость волны, $\varepsilon = k\xi_{max}$ – малый волновой параметр (ξ_{max} – максимальная высота волны, $k = 2\pi/\lambda$– волновое число). В результате система уравнений и граничных условий, описывающих распространение поверхностных волн по слою двухфазной жидкости, принимает вид (здесь и далее * опущены).

$$\left(-\alpha_0\frac{\partial\gamma}{\partial t} + (1-\alpha_0)\frac{\partial V_{1z}}{\partial z} - {\alpha_0}^2\frac{(\rho_2^0 - \rho_1^0)g}{cR}\frac{\partial\gamma}{\partial z} + (1-\alpha_0)\frac{\partial V_{1x}}{\partial x}\right) +$$

$$+\varepsilon\left(-\alpha_0\gamma\frac{\partial V_{1z}}{\partial z} - \alpha_0 V_{1z}\frac{\partial\gamma}{\partial z} - \alpha_0\gamma\frac{\partial V_{1x}}{\partial x} - \alpha_0 V_{1x}\frac{\partial\gamma}{\partial x}\right) = 0,$$

$$\left(\alpha_0\frac{\partial\gamma}{\partial t} + \alpha_0\frac{\partial V_{2z}}{\partial z} - \alpha_0(1-\alpha_0)\frac{(\rho_2^0 - \rho_1^0)g}{cR}\frac{\partial\gamma}{\partial z} + \alpha_0\frac{\partial V_{1x}}{\partial x}\right) +$$

$$+\varepsilon\left(\alpha_0\gamma\frac{\partial V_{2z}}{\partial z} + \alpha_0 V_{2z}\frac{\partial\gamma}{\partial z} + \alpha_0\gamma\frac{\partial V_{2x}}{\partial x} - \alpha_0 V_{2x}\frac{\partial\gamma}{\partial x}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{\rho_1^0}{\rho^0}\frac{\partial V_{1x}}{\partial t}-\alpha_0\frac{\rho_1^0}{\rho^0}\frac{(\rho_2^0-\rho_1^0)g}{cR}\frac{\partial V_{1x}}{\partial z}+\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{R\alpha_0(V_{1x}-V_{2x})}{kc\rho^0}\right)+$$

$$+\varepsilon\left(\frac{\rho_1^0}{\rho^0}V_{1x}\frac{\partial V_{1x}}{\partial x}+\frac{\rho_1^0}{\rho^0}V_{1z}\frac{\partial V_{1x}}{\partial z}+\frac{\alpha_0 R\gamma(V_{1x}-V_{2x})}{kc\rho^0}\right)=0,$$

$$\left(\frac{\rho_1^0}{\rho^0}\frac{\partial V_{1z}}{\partial t}-\alpha_0\frac{\rho_1^0}{\rho^0}\frac{(\rho_2^0-\rho_1^0)g}{cR}\frac{\partial V_{1z}}{\partial z}+\frac{\partial P}{\partial z}+\frac{R\alpha_0(V_{1z}-V_{2z})}{kc\rho^0}+\right.$$

$$\left.+\frac{\alpha_0\gamma(\rho_2^0-\rho_1^0)g}{\rho^0kc^2}\right)+\varepsilon\left(\frac{\rho_1^0}{\rho^0}V_{1x}\frac{\partial V_{1z}}{\partial x}+\frac{\rho_1^0}{\rho^0}V_{1z}\frac{\partial V_{1z}}{\partial z}+\frac{\alpha_0R\gamma(V_{1z}-V_{2z})}{\rho^0kc}\right)=0,$$

$$\left(\frac{\rho_2^0}{\rho^0}\frac{\partial V_{2x}}{\partial t}-(1-\alpha_0)\frac{\rho_2^0}{\rho^0}\frac{(\rho_2^0-\rho_1^0)g}{cR}\frac{\partial V_{1x}}{\partial z}+\frac{\partial P}{\partial x}-\frac{R(1-\alpha_0)(V_{1x}-V_{2x})}{\rho^0kc}\right)+$$

$$+\varepsilon\left(\frac{\rho_2^0}{\rho^0}V_{2x}\frac{\partial V_{2x}}{\partial x}+\frac{\rho_2^0}{\rho^0}V_{2z}\frac{\partial V_{2x}}{\partial z}+\frac{\alpha_0R\gamma(V_{1x}-V_{2x})}{\rho^0kc}\right)=0,$$

$$\left(\frac{\rho_2^0}{\rho^0}\frac{\partial V_{2z}}{\partial t}-(1-\alpha_0)\frac{\rho_2^0}{\rho^0}\frac{(\rho_2^0-\rho_1^0)g}{cR}\frac{\partial V_{2z}}{\partial z}+\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{R(1-\alpha_0)(V_{1z}-V_{2z})}{kc\rho^0}+\right.$$

$$\left.+\frac{\alpha_0\gamma(\rho_2^0-\rho_1^0)g}{\rho^0kc^2}\right)+\varepsilon\left(\frac{\rho_2^0}{\rho^0}V_{2x}\frac{\partial V_{2z}}{\partial x}+\frac{\rho_2^0}{\rho^0}V_{2z}\frac{\partial V_{2z}}{\partial z}+\frac{\alpha_0R\gamma(V_{1z}-V_{2z})}{\rho^0kc}\right)=0.$$

На свободной поверхности слоя выполняются кинематическое

$$\frac{\partial\xi}{\partial t}-(1-\alpha_0)V_{1z}-\alpha_0V_{2z}+\alpha_0\gamma\frac{(\rho_2^0-\rho_1^0)g}{cR}+\varepsilon(\alpha_0\gamma(V_{1z}-V_{2z})+$$

$$\left.+(1-\alpha_0)\frac{\partial\xi}{\partial x}V_{1x}+\alpha_0\frac{\partial\xi}{\partial x}V_{2x}\right)+\varepsilon^2\alpha_0\gamma\frac{\partial\xi}{\partial x}(V_{2x}-V_{1x})=0,\;\; z=\varepsilon\xi(t,x,z)$$

и динамическое граничные условия

$$P-\nu^2\xi=0,\;\; \nu^2=g/kc^2,\quad z=\varepsilon\xi(t,x,z).$$

В линейном приближении по малому волновому параметру ε рассматриваемая краевая задача имеет вид

$$-\alpha_0\frac{\partial\gamma}{\partial t}+(1-\alpha_0)\frac{\partial V_{1z}}{\partial z}-{\alpha_0}^2G\frac{\partial\gamma}{\partial z}+(1-\alpha_0)\frac{\partial V_{1x}}{\partial x}=0,$$

$$\alpha_0\frac{\partial\gamma}{\partial t}+\alpha_0\frac{\partial V_{1z}}{\partial z}+\alpha_0(1-\alpha_0)G\frac{\partial\gamma}{\partial z}+\alpha_0\frac{\partial V_{1x}}{\partial x}=0,$$

$$\mu_1 \frac{\partial V_{1x}}{\partial t} + \alpha_0 \mu_1 G \frac{\partial V_{1x}}{\partial z} + \frac{\partial P}{\partial x} + r\alpha_0 (V_{1x} - V_{2x}) = 0,$$

$$\mu_1 \frac{\partial V_{1z}}{\partial t} + \alpha_0 \mu_1 G \frac{\partial V_{1z}}{\partial z} + \frac{\partial P}{\partial z} + \alpha_0 r (V_{1z} - V_{2z}) + \alpha_0 \gamma r G = 0,$$

$$\mu_2 \frac{\partial V_{2x}}{\partial t} - (1 - \alpha_0) \mu_2 G \frac{\partial V_{1x}}{\partial z} + \frac{\partial P}{\partial x} - r(1 - \alpha_0)(V_{1x} - V_{2x}) = 0,$$

$$\mu_2 \frac{\partial V_{2z}}{\partial t} - (1 - \alpha_0) \mu_2 G \frac{\partial V_{2z}}{\partial z} + \frac{\partial P}{\partial z} - r(1 - \alpha_0)(V_{1z} - V_{2z}) + \alpha_0 \gamma r G = 0,$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} - (1 - \alpha_0) V_{1z} - \alpha_0 V_{2z} - \alpha_0 G \gamma = 0, P - \nu^2 \xi = 0, \qquad z = 0,$$

$$G = \frac{(\rho_2^0 - \rho_1^0) g}{cR}, \ \ r = \frac{R}{kc\rho^0}, \ \ \mu_1 = \frac{\rho_1^0}{\rho^0}, \ \ \mu_2 = \frac{\rho_2^0}{\rho^0}. \qquad (3)$$

Решение задачи (3) должно удовлетворять ряду требований. Наличие относительного движения фаз и силы межфазного трения обусловливает диссипативный процесс – затухание волнового движения. В отсутствие дисперсной фазы ($\alpha_0 = 0$) или при одинаковых истинных плотностях фаз ($\rho_2^0 = \rho_1^0$) решение задачи должно переходить в известные волновые решения для жидкостей [4]. Поэтому в случае распространения по свободной поверхности слоя прогрессивных волн решение системы уравнений и граничных условий (3) следует искать в виде

$$P = e^{-\beta t}(A_1 \cos(x - t) + B_1 \sin(x - t)\, e^z, \quad \gamma = 0,$$

$$V_{ix} = e^{-\beta t}(A_i \cos(x - t) + B_i \sin(x - t)\, e^z, \ \ i = 1,2$$

$$V_{jz} = e^{-\beta t}(A_j \cos(x - t) + B_j \sin(x - t)\, e^z, \ \ j = 1,2$$

где β – декремент затухания волны. Коэффициенты $A_k,\ B_k,\ k = \overline{2,5}$ выражаются через свободные неизвестные $A_1,\ B_1$,

$$A_2 = B_4 = mB_1 + nA_1, \ \ A_3 = B_5 = qB_1 + sA_1,$$

$$B_2 = -A_4 = -nB_1 + mA_1, \ \ B_3 = -A_5 = -sB_1 + qA_1.$$

Выражения для величин m, n, q, s имеют достаточно громоздкий вид и потому здесь не приводятся. Для определения A_1, B_1 необходимо задать дополнительные начальные условия.

При решении краевой задачи получено, что в линейном приближении $\gamma = 0$ – возмущение концентрации дисперсной фазы является величиной более высокого порядка малости по сравнению с возмущениями скорости и давления. Из кинематического условия системы (3) найдено выражение для свободной поверхности

$$\xi = \frac{e^{-t\beta}}{1+\beta^2}\Big(\big((1-\alpha_0)(B_4 - A_4\beta) + \alpha_0(B_5 - A_5\beta)\big)\cos(x-t) -$$
$$-((1-\alpha_0)(A_4 + B_4) + \alpha_0(A_5 + B_5\beta))\sin(x-t)\Big)$$

Из динамического условия получены дисперсионные соотношения для определения неизвестных декремента затухания и фазовой скорости волны. В силу громоздкости уравнений получить аналитические выражения для фазовой скорости и декремента затухания не представляется возможным. Потому дисперсионные соотношения были исследованы численно для различных параметров среды.

В частности были проведены расчеты параметров волнового движения в смеси бесконечной глубины вызванного распространением по свободной поверхности волны длиной $\lambda = 1$м. В качестве несущей фазы выбрана жидкость плотности $\rho_1^0 = 1000\,\text{кг/м}^3$, динамическая вязкость которой характеризуется коэффициентом $\eta = 1004 \cdot 10^{-6}\text{кг/(м} \cdot \text{с)}$; дисперсная фаза представляет собой недеформируемые сферические частицы радиуса $a = 10^{-3}$м.

На рисунке 1 показана зависимость декремента затухания β от концентрации дисперсной фазы α_0. С увеличением концентрации растет декремент затухания. Следовательно, волны на поверхности среды с большей концентрацией примесей гаснут быстрее. При увеличении плотности дисперсионной фазы возрастает и декремент затухания. Рассматривать движение смеси при $\alpha_0 \approx 0{,}5$ в рамках данной модели можно только условно, так как при этом нельзя пренебречь столкновениями частиц. Зависимость фазовой скорости волны c от концентрации дисперсной фазы α_0 представлена на рисунке 2. При $\alpha_0 = 0$ фазовая скорость волны равна $c_0 = 1{,}2495\,\text{м/с}$ (фазовая скорость гравитационной волны для моносреды). С увеличением концентрации дисперсной фазы фазовая скорость падает.

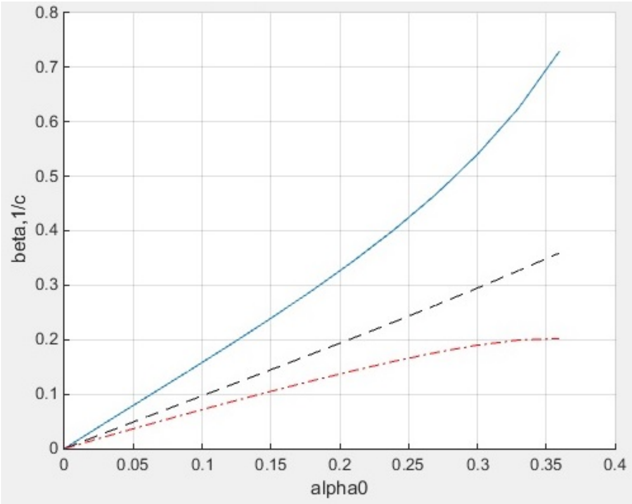

Рис. 1. Зависимость декремента затухания β от концентрации α_0:

----$\rho_2^0 = 2600\text{кг/м}^3$, - - - - $\rho_2^0 = 2000\text{кг/м}^3$, -·-·-·- $\rho_2^0 = 1800\text{кг/м}^3$

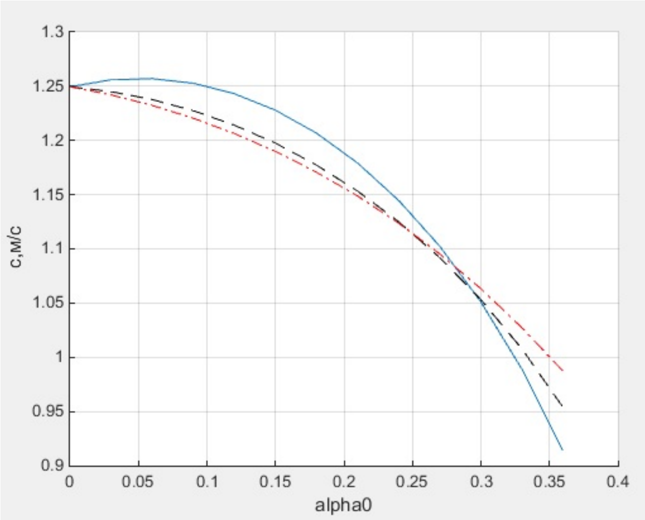

Рис. 2. Зависимость фазовой скорости c от концентрации α_0: ----

$\rho_2^0 = 2600$кг/м^3, - - - - $\rho_2^0 = 2000$кг/м^3, -·-·-·- $\rho_2^0 = 1800$кг/м^3

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нигматулин Р. И. Динамика многофазных сред. Ч. 1. М.: Наука, 1987. 464 с.

2. Рахматулин Х. А. Основы газодинамики взаимопроникающих движений сжимаемых сред //Прикладн. матем. и механика. 1956. Т. 20. №2. С. 184-195.

3. Нигматулин Р. И. Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978. 336 с.

4. Сретенский Л. Н. Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 816 с.

5. Баринов В. А., Бутакова Н. Н. Распространение волн по свободной поверхности двухфазной смеси // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2003. №6. С.94-102.